Funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados

Lucy Martinez

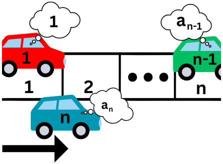
Rutgers University

Basado en trabajo conjunto con Pamela E. Harris

Outline

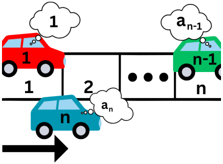
Introducción

Funciones de estacionamiento



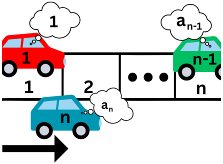
- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.

Funciones de estacionamiento



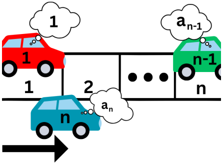
- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.
- Cada uno de los conductores entra al estacionamiento (uno por uno) y cada carro i tiene un estacionamiento preferido a_i.

Funciones de estacionamiento



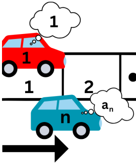
- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.
- Cada uno de los conductores entra al estacionamiento (uno por uno) y cada carro i tiene un estacionamiento preferido a_i.
- Regla de estacionamiento:

Funciones de estacionamiento



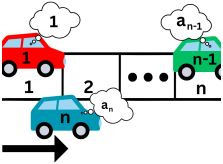
- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.
- Cada uno de los conductores entra al estacionamiento (uno por uno) y cada carro i tiene un estacionamiento preferido a_i.
- Regla de estacionamiento:
    - Cada carro i se dirige al sitio que escogió y trata de estacionarse en el lugar a_i.

Funciones de estacionamiento



- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.
- Cada uno de los conductores entra al estacionamiento (uno por uno) y cada carro i tiene un estacionamiento preferido a_i.
- Regla de estacionamiento:
  - Cada carro i se dirige al sitio que escogió y trata de estacionarse en el lugar a_i.
  - Si está ocupado: el carro sigue andando y se ubica en el primer lugar vacío que encuentre (si hay alguno).

Funciones de estacionamiento



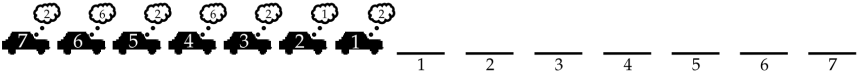
- En un estacionamiento de carros: hay n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n, y hay una fila de n carros al principio del estacionamiento.
- Cada uno de los conductores entra al estacionamiento (uno por uno) y cada carro i tiene un estacionamiento preferido a_i.
- Regla de estacionamiento:
  - Cada carro i se dirige al sitio que escogió y trata de estacionarse en el lugar a_i.
  - Si está ocupado: el carro sigue andando y se ubica en el primer lugar vacío que encuentre (si hay alguno).
- Una función de estacionamiento de longitud n es una lista $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elecciones, para la cual todos los carros se puedan estacionar.

Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento?

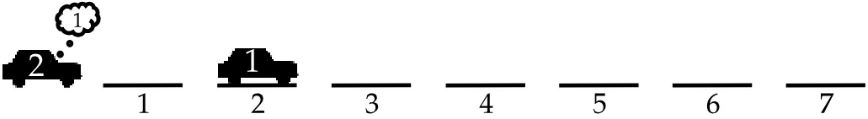
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento?



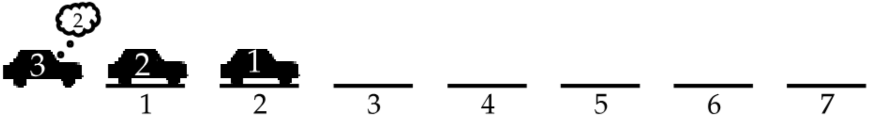
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, \boxed{1}, 2, 6, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento?



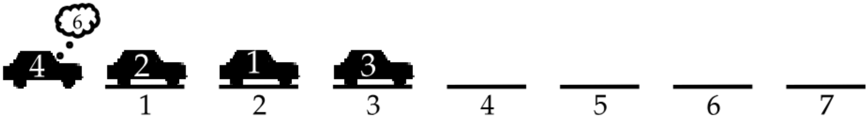
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, \boxed{2}, 6, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento?



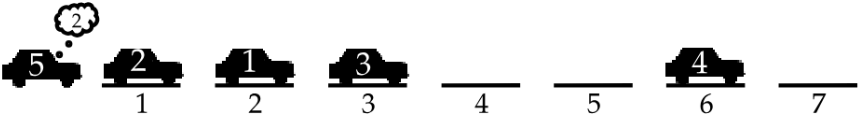
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, \boxed{6}, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento?



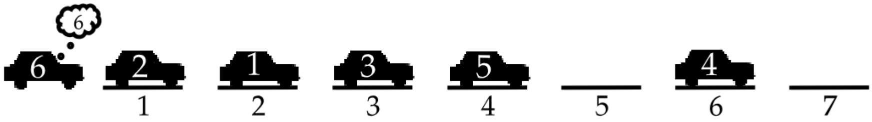
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, \boxed{2}, 6, 2)$ una función de estacionamiento?



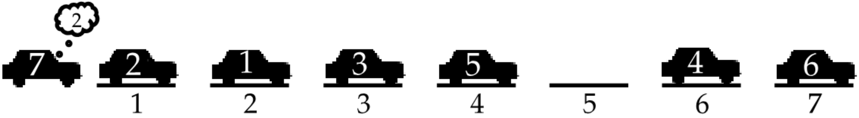
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, \boxed{6}, 2)$ una función de estacionamiento?



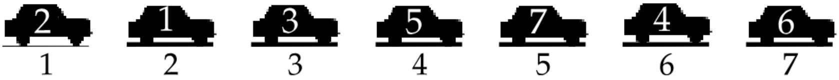
Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, \boxed{2})$ una función de estacionamiento?



Ejemplo 1

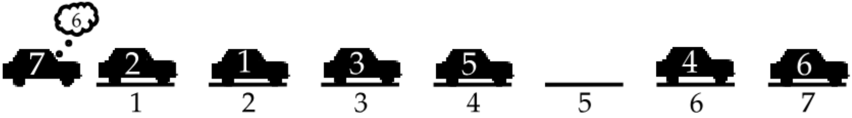
Es $\alpha = (2,1,2,6,2,6,2)$ una función de estacionamiento? Sí!



Ejemplo 1

Es $\alpha = (2,1,2,6,2,6,2)$ una función de estacionamiento? Sí!

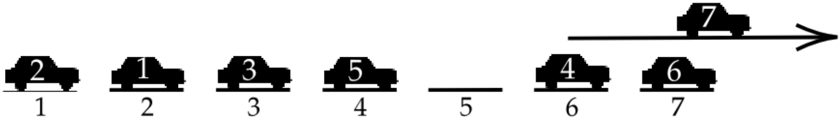
Es $\alpha = (2,1,2,6,2,6,6)$ una función de estacionamiento?



Ejemplo 1

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ una función de estacionamiento? Sí!

Es $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 6)$ una función de estacionamiento? No!



El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.

El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.

Ciertamente, las permutaciones de n elementos, $[n] \coloneqq \{1, 2, \cdots, n\}$, son funciones de estacionamiento.

El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.
Ciertamente, las permutaciones de n elementos, $[n] \coloneqq \{1, 2, \cdots, n\}$, son funciones de estacionamiento.

Veamos algunas:

- $n = 1$: 1

El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.
Ciertamente, las permutaciones de n elementos, $[n] \coloneqq \{1, 2, \cdots, n\}$, son funciones de estacionamiento.

Veamos algunas:

- $n = 1$: 1
- $n = 2$: $11, 21, 12$

El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.

Ciertamente, las permutaciones de n elementos, $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$, son funciones de estacionamiento.

Veamos algunas:

- $n = 1$: 1
- $n = 2$: $11, 21, 12$
- $n = 3$: $111, 211, 121, 112, 122, 221, 212, 113, 131, 311, 231, 123, 132, 213, 312, 321$

El número de funciones de estacionamiento

Cuántas funciones de estacionamiento hay de longitud n? El conjunto de todas las funciones de estacionamiento de longitud n se denotará por $PF(n)$.

Ciertamente, las permutaciones de n elementos, $[n] \coloneqq \{1, 2, \cdots, n\}$, son funciones de estacionamiento.

Veamos algunas:

- $n = 1$: 1
- $n = 2$: 11, 21, 12
- $n = 3$: 111, 211, 121, 112, 122, 221, 212, 113, 131, 311, 231, 123, 132, 213, 312, 321

Teorema (Konheim and Weiss, 1966)

Existen en total $(n+1)^{(n-1)}$ funciones de estacionamiento de longitud n.

Resultados de funciones de estacionamiento

Definición

Sea $\mathfrak{S}_n$ el conjunto de permutaciones de $[n]$, entonces el resultado de estacionamiento es la permutación que codifica el orden en que los carros se estacionan en la calle,

$$\mathcal{O}(\alpha) = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n,$$

donde α es la función de estacionamiento y cada π_i representa el carro π_i que se estaciono en el lugar i en la calle.

Resultados de funciones de estacionamiento

Definición

Sea $\mathfrak{S}_n$ el conjunto de permutaciones de $[n]$, entonces el resultado de estacionamiento es la permutación que codifica el orden en que los carros se estacionan en la calle,

$$\mathcal{O}(\alpha) = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n,$$

donde α es la función de estacionamiento y cada π_i representa el carro π_i que se estaciono en el lugar i en la calle.

Ejemplo (De nuestro ejemplo anterior)

Si $\alpha = (2, 6, 2, 6, 2, 1, 2)$ entonces $\pi = 2135746$:

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido.

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Ejemplo

- Si $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ entonces $\pi = 2135746$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 4\}$

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Ejemplo

- Si $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ entonces $\pi = 2135746$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 4\}$

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Ejemplo

- Si $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ entonces $\pi = 2135746$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 4\}$
- Si $\alpha = (4, 1, 3, 2)$ entonces $\pi = 2431$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 3, 4\}$

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Ejemplo

- Si $\alpha = (2, 1, 2, 6, 2, 6, 2)$ entonces $\pi = 2135746$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 4\}$
- Si $\alpha = (4, 1, 3, 2)$ entonces $\pi = 2431$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1, 2, 3, 4\}$
  - Observación: Si todas las preferencias en una función de estacionamiento son distintas (una permutación), entonces todos los carros son afortunados.

Carros afortunados

Definición

Se dice que un carro es afortunado si se estaciona en su lugar preferido. Sea $\mathsf{Lucky}(\alpha)$ el conjunto de todos los carros afortunados de $\alpha \in PF_n$.

Ejemplo

- Si $\alpha = (2,1,2,6,2,6,2)$ entonces $\pi = 2135746$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1,2,4\}$
- Si $\alpha = (4,1,3,2)$ entonces $\pi = 2431$, y $\mathsf{Lucky}(\alpha) = \{1,2,3,4\}$
  - Observación: Si todas las preferencias en una función de estacionamiento son distintas (una permutación), entonces todos los carros son afortunados.

Observación: el carro que se estaciona en el primer espacio siempre es afortunado!

Resultados previos

Teorema (Gessel y Seo, 2005)

La función generadora para el número de funciones de estacionamiento basado en el número de carros afortunados es:

$$L_n(q) = \sum_{\alpha \in PFn} q^{\mathsf{lucky}(\alpha)} = q \prod_{i=1}^{n-1} (i + (n-i+1)q),$$

en donde $\mathsf{lucky}(\alpha)$ es el número de carros afortunados de α.

Resultados previos

Teorema (Gessel y Seo, 2005)

La función generadora para el número de funciones de estacionamiento basado en el número de carros afortunados es:

$$L_n(q) = \sum_{\alpha \in PFn} q^{\mathsf{lucky}(\alpha)} = q \prod_{i=1}^{n-1} (i + (n - i + 1)q),$$

en donde $\mathsf{lucky}(\alpha)$ es el número de carros afortunados de α.

Ejemplo

Sea $n = 3$, entonces la función generadora es $2q + 8q^2 + 6q^3$:

Resultados previos

Teorema (Gessel y Seo, 2005)

La función generadora para el número de funciones de estacionamiento basado en el número de carros afortunados es:

$$L_n(q) = \sum_{\alpha \in PFn} q^{\mathsf{lucky}(\alpha)} = q \prod_{i=1}^{n-1} (i + (n-i+1)q),$$

en donde $\mathsf{lucky}(\alpha)$ es el número de carros afortunados de α.

Ejemplo

Sea $n = 3$, entonces la función generadora es $2q + 8q^2 + 6q^3$:

$$\begin{array}{c|c|c} 111 & 211, 121, 122, 221 & 231, 123, 132 \\ 112 & 212, 113, 131, 311 & 213, 312, 321 \end{array}$$

Resultados previos

Teorema (Gessel y Seo, 2005)

La función generadora para el número de funciones de estacionamiento basado en el número de carros afortunados es:

$$L_n(q) = \sum_{\alpha \in PFn} q^{\mathsf{lucky}(\alpha)} = q \prod_{i=1}^{n-1} (i + (n - i + 1)q),$$

en donde $\mathsf{lucky}(\alpha)$ es el número de carros afortunados de α.

Ejemplo

Sea $n = 3$, entonces la función generadora es $2q + 8q^2 + 6q^3$:

$$\begin{array}{c|c|c} 111 & 211, 121, 122, 221 & 231, 123, 132 \\ 112 & 212, 113, 131, 311 & 213, 312, 321 \end{array}$$

Nota: Esto no nos dice que carros son afortunados!

Motivación

Motivación

Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

Motivación

Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

- Si $\pi = 2135746$, puede esta permutación ser el resultado de una función de estacionamiento en la que los únicos carros afortunados sean los carros en $I = \{1, 2\}$?

Motivación

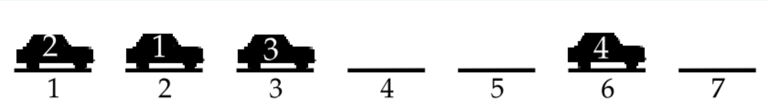
Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

- Si $\pi = 2135746$, puede esta permutación ser el resultado de una función de estacionamiento en la que los únicos carros afortunados sean los carros en $I = \{1, 2\}$?

Motivación

Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

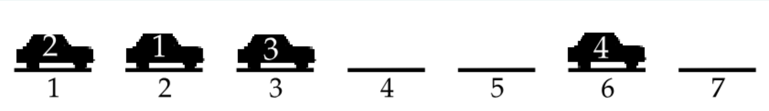
- Si $\pi = 2135746$, puede esta permutación ser el resultado de una función de estacionamiento en la que los únicos carros afortunados sean los carros en $I = \{1, 2\}$?



Motivación

Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

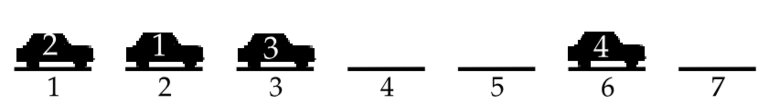
- Si $\pi = 2135746$, puede esta permutación ser el resultado de una función de estacionamiento en la que los únicos carros afortunados sean los carros en $I = \{1, 2\}$?
  No, el carro 4 tiene que ser incluído en el conjunto afortunado I.



Motivación

Que pasa con las permutaciones (el resultado de la función de estacionamiento) si fijamos un conjunto de carros afortunados?

- Si $\pi = 2135746$, puede esta permutación ser el resultado de una función de estacionamiento en la que los únicos carros afortunados sean los carros en $I = \{1, 2\}$?



Pregunta

Si fijamos un subconjunto $I \subseteq [n]$, cuales son las permutaciones en el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ que son resultados de funciones de estacionamiento en donde los únicos carros afortunados están en I?

Resultados

Permutaciones

Que clases de permutaciones son resultados de funciones de estacionamiento cuando fijamos exactamente que carros son afortunados? Podemos caracterizar esas permutaciones?

Permutaciones

Que clases de permutaciones son resultados de funciones de estacionamiento cuando fijamos exactamente que carros son afortunados? Podemos caracterizar esas permutaciones?
Recordemos que el primer carro que se estaciona en la calle tiene que estar en el conjunto afortunado.

Permutaciones

Que clases de permutaciones son resultados de funciones de estacionamiento cuando fijamos exactamente que carros son afortunados? Podemos caracterizar esas permutaciones?

Recordemos que el primer carro que se estaciona en la calle tiene que estar en el conjunto afortunado.

Volvamos a nuestro ejemplo anterior: Si $\pi = 2135746$ entonces concluímos que los carros que formar parte del conjunto afortunado tienen que ser $\{1, 2, 4\}$:

Permutaciones

Que clases de permutaciones son resultados de funciones de estacionamiento cuando fijamos exactamente que carros son afortunados? Podemos caracterizar esas permutaciones?
Recordemos que el primer carro que se estaciona en la calle tiene que estar en el conjunto afortunado.

Volvamos a nuestro ejemplo anterior: Si $\pi = 2135746$ entonces concluímos que los carros que formar parte del conjunto afortunado tienen que ser $\{1, 2, 4\}$:

Los carros 1 y 4 son "fondos de descensos"

Descensos y fondos de descensos

Definición

Dada una permutación $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n$, un índice i, donde $1 < i \leq n$, es un *descenso* de π si $\pi_{i-1} > \pi_i$, y el valor de π_i se llama un *fondo de descenso* de π.

Descensos y fondos de descensos

Definición

Dada una permutación $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n$, un índice i, donde $1 < i \leq n$, es un *descenso* de π si $\pi_{i-1} > \pi_i$, y el valor de π_i se llama un *fondo de descenso* de π.

Por conveniencia, decimos que $i = 1$ es un descenso y π_1 es un fondo de descenso.

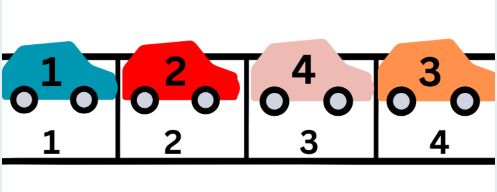
Descensos y fondos de descensos

Definición

Dada una permutación $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$, un índice i, donde $1 < i \leq n$, es un *descenso* de π si $\pi_{i-1} > \pi_i$, y el valor de π_i se llama un *fondo de descenso* de π.
Por conveniencia, decimos que $i = 1$ es un descenso y π_1 es un fondo de descenso.

Ejemplo

Aquí, los carros 1 y 3 son fondos de descensos entonces esos carros pertenecen al conjunto afortunado.



Fondos de descensos y conjuntos afortunados

Lema (Harris, M.)

Fijamos $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$. Cualquier $\alpha \in PF_n$ con resultado $\mathcal{O}(\alpha) = \pi$, si i es un descenso, entonces $\pi_i \in \mathsf{Lucky}(\alpha)$. En otras palabras,

$$\mathrm{DBottom}(\pi) \subseteq \mathsf{Lucky}(\alpha),$$

en donde $\mathrm{DBottom}(\pi)$ es el conjunto de fondos de descensos de π.

Fondos de descensos y conjuntos afortunados

Lema (Harris, M.)

Fijamos $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$. Cualquier $\alpha \in PF_n$ con resultado $\mathcal{O}(\alpha) = \pi$, si i es un descenso, entonces $\pi_i \in \mathsf{Lucky}(\alpha)$. En otras palabras,

$$\text{DBottom}(\pi) \subseteq \mathsf{Lucky}(\alpha),$$

en donde $\text{DBottom}(\pi)$ es el conjunto de fondos de descensos de π.

Observación: Todos los fondos de descensos son carros afortunados pero no todos los carros afortunados tienen que ser fondos de descensos.

Fondos de descensos y conjuntos afortunados

Lema (Harris, M.)

Fijamos $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$. Cualquier $\alpha \in PF_n$ con resultado $\mathcal{O}(\alpha) = \pi$, si i es un descenso, entonces $\pi_i \in \mathsf{Lucky}(\alpha)$. En otras palabras,

$$\mathrm{DBottom}(\pi) \subseteq \mathsf{Lucky}(\alpha),$$

en donde $\mathrm{DBottom}(\pi)$ es el conjunto de fondos de descensos de π.

Observación: Todos los fondos de descensos son carros afortunados pero no todos los carros afortunados tienen que ser fondos de descensos.

Ejemplo

Supongamos que $I = \{1, 2, 3\}$ y $\pi = 123$.

Resumén

Nuestros resultados:

- Caracterizamos todos los tipos de permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados:
  - El primer carro estacionado en la calle es un carro afortunado, y
  - todos los fondos de descensos son parte del conjunto afortunado.

Resumén

Nuestros resultados:

- Caracterizamos todos los tipos de permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados:
  - El primer carro estacionado en la calle es un carro afortunado, y
  - todos los fondos de descensos son parte del conjunto afortunado.
- Otros resultados que también tenemos en nuestro artículo:

Resumén

Nuestros resultados:

- Caracterizamos todos los tipos de permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados:
  - El primer carro estacionado en la calle es un carro afortunado, y
  - todos los fondos de descensos son parte del conjunto afortunado.
- Otros resultados que también tenemos en nuestro artículo:

  Damos una fórmula de el número de las permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento en la que los primeros k carros son afortunados.

Resumén

Nuestros resultados:

- Caracterizamos todos los tipos de permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados:
  - El primer carro estacionado en la calle es un carro afortunado, y
  - todos los fondos de descensos son parte del conjunto afortunado.
- Otros resultados que también tenemos en nuestro artículo:

  Damos una fórmula de el número de las permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento en la que los primeros k carros son afortunados.

  Damos una fórmula de el número de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados.

Resumén

Nuestros resultados:

- Caracterizamos todos los tipos de permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados:
  - El primer carro estacionado en la calle es un carro afortunado, y
  - todos los fondos de descensos son parte del conjunto afortunado.
- Otros resultados que también tenemos en nuestro artículo:

  Damos una fórmula de el número de las permutaciones que son resultados de funciones de estacionamiento en la que los primeros k carros son afortunados.

  Damos una fórmula de el número de funciones de estacionamiento con un conjunto fijo de carros afortunados.

  Todos nuestros resultados también son generalizados en el caso que hayan mas espacios de estacionamiento que carros.

Agradecimientos

Esta investigación fue por parte apoyada por un premio de la NSF DMS-2150434 y por la beca NSF-GRFP bajo el numero de premio 2233066.

Muchas Gracias!

https://marti310.github.io
lucy.martinez@rutgers.edu

Conjuntos afortunados

Definición

Sea $\alpha \in PF_n$. Un conjunto I se llama *conjunto afortunado* si todos los carros afortunados de α son exactamente los carros en el conjunto I.

Conjuntos afortunados

Definición

Sea $\alpha \in PF_n$. Un conjunto I se llama *conjunto afortunado* si todos los carros afortunados de α son exactamente los carros en el conjunto I.

Teorema (Harris, M.)

Un subconjunto $I \subseteq [n]$ es un conjunto afortunado de PF_n si y sólo si $1 \in I$.

Conjuntos afortunados

Definición

Sea $\alpha \in PF_n$. Un conjunto I se llama *conjunto afortunado* si todos los carros afortunados de α son exactamente los carros en el conjunto I.

Teorema (Harris, M.)

Un subconjunto $I \subseteq [n]$ es un conjunto afortunado de PF_n si y sólo si $1 \in I$.

Proof.

($\Rightarrow$) En cualquier $\alpha \in PF_n$, el primer carro siempre va a ser un carro afortunado ya que nadie se a estacionado, esto implica que $1 \in I$.

$\square$

Prueba (Idea)

($\Leftarrow$) Sea un conjunto $I = \{i_1 = 1, i_2, i_3, \ldots, i_k\}$, donde $k \in [n]$.
Asumiendo sin pérdida de generalidad que $i_1 = 1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k$.